PERMUTACIJE, VARIJACIJE I KOMBINACIJE BEZ PONAVLJANJA

4.Pet učenika treba rasporediti na pet stolica.Na koliko načina je to moguće uraditi?
Rešenje:
n=5
k=5
n=k => permutacije od 5 elemenata
$P_5 = 5! = 120$ načina

5.Od pet cifara 1,2,3,4 i 5 treba sastaviti sve trocifrene brojeve kod kojih se cifre ne ponavljaju.Koliko ima tih brojeva?
Rešenje:
n=5
k=3
k<n i redosled elemenata je bitan jer $123 \neq 213$
=> varijacije od 5 elemenata treće klase
$V_3^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ brojeva.

6.Od pet učenika treba izabrati 3 za učešće u kvizu.Na koliko načina se to može uraditi?
Rešenje:
n=5
k=3
k<n i redosled elemenata nije bitan (bitno je samo ko je izabran a ne kojim redom su osobe birane)
=> kombinacije od 5 elemenata treće klase
$$C_3^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ načina.}$$

7.Koliko listića u igri LOTO 7/39 treba popuniti da bismo sigurno dobili sedmicu?
Rešenje:
n=39
k=7
-redosled kojim su brojevi izabrani nije bitan
$$C_7^{39} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15.380.937 \text{ listića.}$$

8. U stroju su rasporedjena 4 dečaka i 3 devojčice, ali tako da devojčice ne budu jedna do druge. Koliko se različitih rasporeda može napraviti?

(devojčica) **dečak** _(devojčica)_ **dečak** _(devojčica)_ **dečak** _(devojčica)_ **dečak** _(devojčica)

-broj mesta na koje mogu da stanu devojčice je 5 a od tih 5 treba izabrati 3 mesta (redosled kojim se biraju mesta nije bitan); broj načina na koji se to može uraditi je: $C_3^5 = C_2^5$
- četiri dečaka mogu da se permutuju na svojim mestima na 4! načina
-tri devojčice mogu da se permutuju na izabranim mestima na 3! načina

Ukupan broj mogućih rasporeda je: $C_2^5 \cdot 4! \cdot 3! = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 24 \cdot 6 = 1440$.

9. Koliko se pravougaonika može uočiti na šahovskoj tabli?
Rešenje:
Za obrazovanje pravougaonika trebaju nam 2 horizontalne I 2 vertikalne linije.
- zadatak se svodi na određivanje broja načina na koji možemo izabrati 2 vertikalne I 2 horizontalne linije od mogućih 9 horizintalnih I 9 vertikalnih linija na tabli; redosled kojim biramo linije nije bitan
=>

Broj pravougaonika je : $C_2^9 \cdot C_2^9 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} \cdot \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36 \cdot 36 = 1296$

10. Na koliko načina možemo na šahovskoj tabli rasporediti 8 topova,tako da oni ne tuku jedan drugog?

	1						

-broj mogućnosti za prvog topa je $64=8^2$
-za drugog topa ostaje 7^2 mogućnosti jer se vrsta I kolona u kojoj je prvi top izbacuju (tu ne sme biti više nijedan top)
-za trećeg topa ostaje 6^2 mogućnosti (izbačene su vrste I kolone u kojoj su 1. I 2. Top)
…

-za sedmog topa imamo 2^2 mogućnosti
-za poslednjeg samo jednu mogućnost
Ukupan broj mogućnosti je $8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^2$ **$= (8!)^2$**

11. Koliko se trocifrenih prirodnih brojeva može napisati (cifre se ne ponavljaju) takvih da su oni
a)manji od 675
*brojevi manji od 600
-prvu cifru možemo izabrati na 5 načina (0 ne može biti na prvom mestu, pa na prvom mestu mogu biti cifre 1,2,3,4 ili 5)
- na drugom mestu može biti neka od preostalih 9 cifara(nakon izbora prve ostaje 9 cifara jer se cifre ne mogu ponavljati)
- na trećem mestu može biti neka od preostalih 8 cifara nakon izbora prve dve cifre

5 * 9 * 8 = 360 brojeva (manjih od 600)
*brojevi od 600 do 670
-6 - je na prvom mestu
- na drugom mestu može biti jedna cifra iz skupa $\{0,1,2,3,4,5\}$
- na trećom mestu može biti neka od preostalih 8 cifara
6
6 * 8 = 48 brojeva (600-670)
Ukupno do sada: 360+48= 408
I još mogu brojevi 670,671,672,673 i 674
Ukupno ih ima 413

b)deljivi sa 5
-broj je deljiv sa 5 ako se završava na 0 ili 5

____ ____ 0
9 * 8 = 72 (nula je na poslednjem mestu pa na prvo može bilo koja od preostalih 9 Cifara)

____ ____ 5
8 * 8 = 64 (na prvo mesto ne sme 0)
Ukupno : 72+64= 136

c)deljivi sa 4
-broj je deljiv sa 4 ako mu je dvocifreni završetak deljiv sa 4
* ako su dvocifreni završeci: 04, 08, 20, 40, 60, 80 - onda na prvo mesto može bilo koja od preostalih preostalih 8 cifara pa ovih brojeva ima 8*6 = 48 (6 dvocifrenih završetaka)
* ako su dvocifreni završeci: 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92, 96 – na prvo mesto može neka od preostalih cifara ali ne 0, odnosno broj izbora za prvo mesto je 7 pa ovih brojeva ima 7*16=112
Ukupno : 48+112=160.

12.Koliko ima prirodnih brojeva čiji je zbir cifara jednak 5 ako se cifre ne mogu ponavljati?
-zbir 5 daju cifre: 5; 5 i 0; 1 i 4 ; 1,4 i 0; 2 i 3; 2,3 i 0.
* jednocifreni: 5 - 1 broj
* dvocifreni:50,14, 41, 23, 32 – 5 brojeva
*trocifreni: 104, 140, 401, 410, 203, 230, 302,320 – 8 brojeva
Ukupno : 1+5+8=14 brojeva.

13. Na koliko načina košarkaški trener može da sastavi startnu petorku,u kojoj moraju biti bar jedan centar i bar jedan bek ako ima na raspolaganju 12 košarkaša, od kojih su trojica centri, petorica bekovi, četvorica krila?
(startne petorke su različite ukoliko ne sadrže iste igrače, nevezano za poziciju u timu)?
- u petorci mora biti jedan bek od petorice i 1 centar od trojice. Ostali igrači (njih trojica) se biraju od preostalih 10 igrača.

$$C_1^5\cdot C_1^3\cdot C_3^4+C_1^5\cdot C_2^3\cdot C_2^4+C_1^5\cdot C_3^3\cdot C_1^4+C_2^5\cdot C_1^3\cdot C_2^4+C_2^5\cdot C_2^3\cdot C_1^4+C_2^5\cdot C_3^3+C_3^5\cdot C_1^3\cdot C_1^4$$

$$+C_3^5\cdot C_2^3+C_4^5\cdot C_1^3=$$

$$5\cdot 3\cdot 4+5\cdot 3\cdot 6+5\cdot 1\cdot 4+10\cdot 3\cdot 6+10\cdot 3\cdot 4+10+10\cdot 3\cdot 4+10\cdot 3+5\cdot 3$$

$+$
načina.

<u>PERMUTACIJE, VARIJACIJE I KOMBINACIJE SA PONAVLJANJEM</u>

15.Koliko ima sedmocifrenih brojeva koji se sastoje od tri trojke, dve petice i dve sedmice?
Rešenje:
3,3,3,5,5,7,7 - ukupan broj elemenata je n=7
- trojka se ponavlja 3 puta
- petica se ponavlja 2 puta
- sedmica se ponavlja 2 puta

$$P_{(3,2,2)}(7)=\frac{7!}{3!2!2!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=7\cdot 5\cdot 3\cdot 2=210$$

16.Koliko ima različitih četvorocifrenih brojeva deljivih sa 4 ako se cifre mogu ponavljati?
-broj različitih dvocifrenih završetaka je 25:
00,04,08,12,16,20,24,28,32,36,40,44,48,52,56,60,64,68,72,76,80,84,88,92,96
-broj mogućnosti za prva dva mesta
*za prvo mesto 9 mogućnosti (ne može 0)
*za drugo mesto 10 mogućnosti
Ukupan broj : $25\cdot 9\cdot 10=2250$
17.Na koliko načina može biti ocenjen jedan učenik na kraju školske godine iz 14 predmeta?
-broj ocena je 5: n=5
-broj predmeta je 14: k= 14
-ocene se ponavljaju i bitan je redosled => varijacije sa ponavljanjem
Ukupan broj načina je $\overline{V}_{14}^{5}=5^{14}$.
18.U poslastičarnici se prodaju četiri vrste kolača: krempite, šamponjezi, napoleoni i ekleri.Na koliko načina je moguće kupiti 7 kolača?
n=4 (vrste kolača)
k=7 (broj kolača koje kupujemo)
-redosled kojim kupujemo nije bitan, kolači se ponavljaju=> kombinacije sa ponavljanjem
Broj načina je: $\overline{C}_{7}^{4}=\binom{4+7-1}{7}=\binom{10}{7}$
19. Koliko ima permutacija cifara 1,2,3,...,9 u kojima nije 1 ispred 2?
Rešenje:
Ukupan broj permutacija 9 cifara je 9!. U polovini permutacija se 1 nalazi ispred 2 a u polovini se 1 nalazi iza 2.
Broj traženih permutacija je : $\frac{1}{2}P_9=\frac{1}{2}\cdot 9!$
20.Od tri matematičara i pet inženjera treba formirati ekspertski tim od šest članova u kojem će biti bar 2 matematičara.Na koliko načina je to moguće uraditi?
* 2 matematičara i 4 inženjera: $C_2^3\cdot C_4^5=C_1^3\cdot C_1^5=3\cdot 5=15$
* 3 matematičara i 3 inženjera: $C_3^3\cdot C_3^5=C_0^3\cdot C_2^5=1\cdot\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$
Ukupan broj načina: 15+10=25
21.Na koliko načina sedam osoba različite starosti može da stane u vrstu ali tako da najstarija bude u sredini?

___ ____ ____ najstarija ____ ____ ____
-kada najstariju osubu fiksiramo u sredinu vrste preostalih 6 osoba se mogu permutovati na 6! Načina
Broj načina : 6!
22.U koliko se različitih permutacija elemenata a,b,c,d,e elemenat a nalazi na prvom a elemenat e na poslednjem mestu ako se slova ne ponavljaju?
a ___ ___ ___ e
-kada fiksiramo a na prvo mesto a e na poslednje preostala tri elementa se na srednja 3 mesta mogu permutovati na 3! Načina
Ukupan broj načina je 3!=6

23.Ako se za jednu državu zna da u njoj ne postoje dva stanovnika sa istim rasporedom zuba koliki je maksimalan broj stanovnika te države?
- za zube postoje 32 mesta; na svakom mestu zub postoji ili ne postoji;

Broj elemenata je 2 (zub postoji, zub ne postoji).
Te elemente treba rasporediti na 32 mesta (k=32) pri čemu je raspored bitan => varijacije sa ponavljanjem.

Maksimalan broj stanovnika sa različitim rasporedom je : $\overline{V}_{32}^{2} = 2^{32}$

24.Dokazati da u mestu sa 1000 stanovnika postoje bar dva sa istim inicijalima.
-broj elemenata je 30 : n=30 (broj slova azbuke)
-broj elemenata koje biramo je 2: k=2 (2 slova čine inicijale)
-slova se mogu ponavljati i redosled slova je bitan => varijacije sa ponavljanjem

Ukupan broj različitih inicijala je $\overline{V}_{2}^{30} = 30^{2} = 900$=> u mestu sa 1000 stanovnika moraju postojati ljudi sa istim inicijalima.

25.Poznato je da krokodil ima najviše 68 zuba.Dokazati da među 16^{17} krokodila ne moraju postojati dva sa istim rasporedom zuba.
(kao u 23.)

Ukupan broj različitih rasporeda zuba kod krokodila je : $\overline{V}_{68}^{2} = 2^{68} = \left(2^{4}\right)^{17} = 16^{17}$=> ne moraju postojati dva krokodila sa istim rasporedom zuba.

26.Od 18 različitih cvetova treba napraviti buket koji se sastoji iz neparnog broja cvetova ali ne manjeg od 3.Na koliko načina je to moguće uraditi?

Broj različitih buketa je: $C_{3}^{18} \cdot C_{5}^{18} \cdot C_{7}^{18} \cdot C_{9}^{18} \cdot C_{11}^{18} \cdot C_{13}^{18} \cdot C_{15}^{18} \cdot C_{17}^{18}$

27.Iz grupe od 7 muškaraca i 4 žene treba izabrati 6 osoba ali tako da među njima budu bar 2 žene.Na koliko načina je to moguće učiniti?

* 2 žene i 4 muškarca: $C_{2}^{4} \cdot C_{4}^{7} = C_{2}^{4} \cdot C_{3}^{7} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 35 = 210$

* 3 žene i 3 muškarca: $C_{3}^{4} \cdot C_{3}^{7} = C_{1}^{4} \cdot C_{3}^{7} = 4 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 140$

* 4 žene i 2 muškarca: $C_{4}^{4} \cdot C_{2}^{7} = 1 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$

Ukupno: 210+140+21=371.

28.Ukrotitelj izvodi u cirkusku arenu 5 lavova i 4 tigra pri čemu ne mogu dva tigra ići jedan za drugim.Na koliko načina se životinje mogu rasporediti?
Raspored mora biti : (T) lav (T) lav (T) lav (T) lav (T) lav (T) pri čemu su (T) moguće pozicije tigrova.

- od mogućih 6 pozicija 4 pozicije (za 4 tigra) možemo izabrati na $C_{4}^{6} = C_{4}^{6} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ načina.

-broj rasporeda lavova je : 5!
-broj rasporeda tigrova je 4!
Ukupan broj rasporeda : $15 \cdot 5! \cdot 4!$.

29.Koliko ima četvrocifrenih brojeva čije su cifre različite i kod kojih je zbir poslednje dve cifre jednak 5?
Na kraju mogu biti : 05,50,14,41,23,32
* ako su na kraju 05 ili 50(2 mogućnosti)
  - za prvu cifru imamo 8 mogućnosti (nula nije među preostalim ciframa)a za drugu 7
    ukupno: $2 \cdot 8 \cdot 7 = 112$
* ako su na kraju 14,41,23 ili 32 (4 mogućnosti)
  - za prvu cifru imamo 7 mogućnosti jer ne smemo staviti 0 a za drugu takođe 7
    ukupno: $4 \cdot 7 \cdot 7 = 196$
Ukupno svih brojeva: 196+112=308.

30. Koliko ima trocifrenih prirodnih brojeva deljivih sa 4 kod kojih su sve cifre različite?

*ako je dvocifreni završetak 04,08, 20, 40, 60 ili 80 na prvom mestu može biti neka od preostalih 8 cifara : $6 \cdot 8 = 48$
*ako je dvocifreni završetak 12,16, 24,28,32,36, 48,52,56, 64,68,72,76, 84, 92,96
na prvom mestu može biti 7 cifara jer ne sme 0 : $16 \cdot 7 = 112$
Ukupno svih brojeva: 48+112=160.

31.Iz kompleta od 52 karte izvučeno je 10 karata.U koliko slučajeva se među izvučenim kartama nalazi:
4- dame
48 – karata koje nisu dame
a)tačno jedna dama: $C_1^4 \cdot C_9^{48}$

b)tačno dve dame: $C_2^4 \cdot C_8^{48}$

c)bar dve dame: $C_2^4 \cdot C_8^{48} + C_3^4 \cdot C_7^{48} + C_4^4 \cdot C_6^{48}$ (ili $C_{10}^{52} - C_1^4 \cdot C_9^{48}$)

32.Na koliko načina se špil od 52 karte može podeliti na dva dela tako da u svakom delu budu po dve dame?
Rešenje: $\frac{1}{2} C_2^4 \cdot C_8^{48}$

34.Vozač je za svoj automobil kupio četiri spoljašnje i četiri unutrašnje gume.Na koliko načina te gume mogu da se spare?
Rešenje: $4! \cdot 4!$
(4! Rasporeda unutrašnjih i 4! Rasporeda spoljašnjih guma)

35. Tri studenta dele sobu.Oni imaju 4 šoljice, 5 tacni i 6 kašičica.Na koliko načina mogu da piju čaj ako svaki treba da koristi šolju,tacnu i kašičicu?

37.Dat je skup cifara 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.Odrediti:

a) koliko se petocifrenih brojeva može formirati ako se cifre ne ponavljaju

____ ____ ____ ____ ____
9 9 8 7 6
Ukupno: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

b)koliko se četvorocifrenih parnih brojeva može formirati

____ ____ ____ ____
9 10 10 5
Ukupno: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$

c)u koliko permutacija bez ponavljanja,ovih cifara se cifra 1 nalazi ispred cifre 9
U $\frac{10!}{2}$ permuatcija. (pogledati 19.zadatak)

d) koliko trocifrenih brojeva deljivih sa 5 se može formirati

___ ___ ___
9 10 2
Ukupno: $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$

e) koliko se sedmocifrenih parnih brojeva može formirati ako se cifre ne ponavljaju

___ ___ ___ ___ ___ ___ 0
9 8 7 6 5 4 $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

___ ___ ___ ___ ___ ___ ___
8 8 7 6 5 4 4 $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4$
Ukupno: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4$

f) koliko ima permutacija bez ponavljanja kod kojih su 0 i 1 susedni elementi pri čemu je 0 ispred 1

- deo 01 se posmatra kao jedna cifra jer se ne sme razdvajati pa onda permutujemo ukupno 9 cifara => broj permutacija je 9!

g) koliko ima permutacija bez ponavljanja u kojima se između 0 i 1 nalazi tačno jedan element

-deo 0__1 se posmatra kao jedna cifra pa permutujemo 8 cifara => 8!

-0 i 1 mogu biti u dva rasporeda 0__1 i 1__0 a broj mogućih cifara između njih je 8

=> $2 \cdot 8 \cdot 8!$

h) koliko ima permutacija bez ponavljanja u kojima su cifre 2,5, i 7 jedna do druge

i)u zadatom poretku: 257 –jedna cifra => 8!

ii)u proizvoljnom poretku: 257 -jedna cifra ali broj njihovih permutacija je 3! => $3! \cdot 8!$

38.Osam autora treba da napišu 16 poglavlja knjige.Na koliko načina oni mogu rasporediti materijal ako dva autora pišu po 3 poglavlja,četiri po dva a dva po jedno poglavlje?

$$\bar{P}_{16}(3,3,2,2,2,2,1,1) = \frac{16!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!}$$

39.U osam četvorokrevetnih soba treba rasporediti 32 osobe.Na koliko načina je to moguće učiniti?

$$\frac{1}{8!} C_4^{32} \cdot C_4^{28} \cdot C_4^{24} \cdot C_4^{20} \cdot C_4^{16} \cdot C_4^{12} \cdot C_4^{8} \cdot C_4^{4}$$

40.Na svakoj od dve palube na brodu radi po 4 mornara.Na koliko načina se mogu izabrati mornari za brod ako postoji 31 kandidat od kojih 10 žele da rade na gornjoj, 12 na donjoj, a devetorici je svejedno na kojoj palubi rade?

$$C_0^9 \cdot C_4^{10} \cdot C_4^{21} + C_1^9 \cdot C_3^{10} \cdot C_4^{20} + C_2^9 \cdot C_2^{10} \cdot C_4^{19} + C_3^9 \cdot C_1^{10} \cdot C_4^{18} + C_4^9 \cdot C_0^{10} \cdot C_4^{17}$$

41.Muž ima 12 prijatelja- 5 žena i 7 muškaraca,a njegova žena -7 žena i 5 muškaraca.Na koliko načina oni mogu sastaviti društvo od 6 žena i 6 muškaraca tako da 6 gostiju pozove muž a 6 žena?

$$C_0^5 \cdot C_6^7 \cdot C_6^7 \cdot C_0^5 + C_1^5 \cdot C_5^7 \cdot C_5^7 \cdot C_1^5 + C_2^5 \cdot C_4^7 \cdot C_4^7 \cdot C_2^5 + C_3^5 \cdot C_3^7 \cdot C_3^7 \cdot C_3^5 + C_4^5 \cdot C_2^7 \cdot C_2^7 \cdot C_4^5 + C_5^5 \cdot C_1^7 \cdot C_1^7 \cdot C_5^5$$

42.U autobusu koji staje na 4 stanice nalazi se 12 putnika.Na koliko načina putnici mogu izaći na te 4 stanice u zavisnosti samo od broja njih koji su izašli na različitim stanicama?

n=4

k=12

$$\bar{C}_{12}^{4} = \binom{12+4-1}{12} = \binom{15}{12}$$

45.Na koliko se načina na policu mogu poređati 2 crvene, 3 zelene, i 4 crne knjige tako da knjige iste boje budu jedna do druge?

-3! Načina za raspored boja

-2! Načina za raspored crvenih knjiga

-3! Načina za raspored zelenih knjiga

-4! Načina za raspored crnih knjiga

Ukupno: $3! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!$

46.Koliko ima stanica na jednoj pruzi ako za razna putovanja (istim razredom) tom prugom postoji 552 različite vozne karte?

-za jednu kartu su potrebne 2 stanice i bitan je redosled stanica na karti=>

*n-broj stanica=?

*k=2

-bitan redosled => varijacije

$V_2^n = 552 \Rightarrow n(n-1) = 552 \Rightarrow 24 \cdot 23 = 552 \Rightarrow n = 24$ stanice.

47. Pauk se kreće po horizontalnoj rešetki koja je u obliku kvadratne mreže dimenzija 6 x 6. Kretanje pauka je pravolinijsko, korak po korak, od čvora rešetke do čvora rešetke, ali uvek desno ili gore,pri čemu pauk polazi iz donjeg legog ugla rešetke, a cilj mu je da uhvati muvu koja se nalazi u desnom gornjem uglu. Na koliko različitih načina pauk može stići do muve?
Svaki put se sastoji od 12 stranica manjih kvadrata- 6 vertikalnih(V)I 6 horizontalnih(H)
n=12
V se ponavlja 6 puta
H se ponavlja 6 puta
$\overline{P}_{12}(6,6)=\frac{12!}{6!\cdot 6!}$